



Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a XI-a

Problema 1. Să se rezolve, în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$, ecuația: $X^{2010} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$.

Florin Antohe, profesor, Galați

Problema 2. Fie $X, Y, Z \in M_n(\mathbb{R})$, matrice care comută două câte două, astfel încât

$$(X - Y) \cdot (Y - Z) = O_n. \text{ Să se arate că } \det\left((X - Y)^4 + (Y - Z)^4 + (Z - X)^4\right) \geq 0.$$

Dumitru și Rodica Bălan, profesori, Galați

Problema 3.

Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit astfel: $x_0 > 1$, $x_{n+1} = \frac{2 \cdot x_n + 1}{x_n + 2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$;

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot (\sqrt{x_n} - 1)$.

Mihai Totolici, profesor, Galați

Problema 4. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ cu proprietățile :

a) $(\forall) a, b \in [0, 1]$ astfel încât $a + b \leq 1 \Rightarrow f(a) + f(b) \leq f(a + b)$.

b) $f(1) = 1$.

Se cere:

1) Să se determine $\max_{x \in [0, 1]} f(x)$ și $\min_{x \in [0, 1]} f(x)$;

2) Să se demonstreze că funcția are limite laterale finite în orice punct $x_0 \in (0, 1)$;

3) Să se construiască o funcție cu proprietățile a) și b).

Constantin Ursu, profesor, Galați

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.